El aparato descrito fué inventado por Sir Francis Galton [illegible] en una forma que daba toscamente la distribución binomial [illegible] haciendo pasar por varias filas de clavos una corriente de [illegible] nes que se recogían en compartimientos adecuados. El [illegible] después generalizado por Karl Pearson empleando filas de [illegible] jetas a piezas movibles, lo cual permitía disponer las cuñas [illegible] que dieran cualquier relación $q : p$ (ref. (174)).

10.14. No hay que olvidar que, aunque hemos hablado [illegible] la asimetría y curtosis de la distribución binomial, ésta es [illegible] discontinua, lo cual constituye una limitación importante.

Consideremos, por ejemplo, la distribución de frecuencias [illegible] varones, en grupos de 10.000 nacimientos, y sea su media [illegible] 5.100. La distribución vendrá dada por los términos de [illegible] $(0{,}49+0{,}51)^{10.000}$, y la desviación típica será en números redondos [illegible] cimientos. La distribución se extenderá, por consiguiente, [illegible] o más nacimientos a cada lado de la media, y para obtenerla [illegible] que calcular nada menos que unos 300 términos de la serie [illegible] exponente 10.000. Esto no sólo sería prácticamente imposible [illegible] pleo de ciertos métodos de aproximación, sino que daría la [illegible] con un detalle innecesario; desde el punto de vista práctico, [illegible] mos obtener la distribución de frecuencia en intervalos de un [illegible] miento, sino en intervalos de 100, por ejemplo. Necesitamos, [illegible] tituir el polígono binomial por una curva continua que tenga [illegible] damente las mismas ordenadas, y que entre dos ordenadas [illegible] ra y_1 e y_2 comprenda un área equivalente a la frecuencia de [illegible] vaciones registradas entre los correspondientes valores x, [illegible] variable.

FORMA LIMITE DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL CUANDO n CRECE INDEFINIDAMENTE

10.15. Cuando n se hace grande, cada uno de los términos [illegible] arrollo binomial se hace pequeño. Pero lo que importa es la [illegible] términos comprendidos entre ciertos límites, los cuales no [illegible] general, próximos.

Consideremos en primer lugar el caso en que p y q son [illegible] términos de la serie son:

$$N\left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right.$$

La probabilidad de m aciertos es:

$$N\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

[illegible]bilidad de $m+1$ aciertos se deduce de la anterior sin más que [illegible] por $(n-m)/(m+1)$ Esta última frecuencia será, por tanto, [illegible] la anterior siempre que

$$n-m > m+1$$

$$m < \frac{n-1}{2}$$

[illegible]amos, para mayor sencillez, que n sea par, por ejemplo, [illegible]; entonces la probabilidad de k aciertos será la mayor, y su [illegible]

$$y_0 = N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{k!\,k!} \tag{10.6}$$

[illegible]gono se extiende simétricamente a cada lado de la ordenada [illegible] Consideremos la probabilidad de $k+x$ aciertos; su valor es:

$$y_x = N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{(k+x)!\,(k-x)!} \tag{10.7}$$

[illegible]

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-x+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+x)}$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\left(1-\frac{3}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(1+\frac{3}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{x-1}{k}\right)\left(1+\frac{x}{k}\right)} \tag{10.8}$$

[illegible] ahora su valor aproximado suponiendo que k sea muy [illegible] comparación con x, de modo que pueda despreciarse $(x/k)^2$ [illegible] con (x/k). Esta hipótesis no implica dificultad alguna, por- [illegible] falta considerar valores de x mucho mayores que tres veces [illegible] típica ó $3\sqrt{k/2}$, y el cociente de este valor por k es $3/\sqrt{2k}$, [illegible]mente será pequeño cuando k sea grande. En esta hipótesis, [illegible] aplicar el desarrollo en serie logarítmica

$$\log_e(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \ldots$$

[illegible] de los paréntesis de la fracción (10.8), despreciando los tér- [illegible]guen al primero. Con esta aproximación tendremos:

El aparato descrito fué inventado por Sir Francis Galton [illegible] en una forma que daba toscamente la distribución binomial [illegible] haciendo pasar por varias filas de clavos una corriente de [illegible] nes que se recogían en compartimientos adecuados. El [illegible] después generalizado por Karl Pearson empleando filas de [illegible] jetas a piezas movibles, lo cual permitía disponer las cuñas [illegible] que dieran cualquier relación $q : p$ (ref. (174)).

10.14. No hay que olvidar que, aunque hemos hablado [illegible] la asimetría y curtosis de la distribución binomial, ésta es [illegible] discontinua, lo cual constituye una limitación importante.

Consideremos, por ejemplo, la distribución de frecuencias [illegible] varones, en grupos de 10.000 nacimientos, y sea su media [illegible] 5.100. La distribución vendrá dada por los términos de [illegible] $(0{,}49+0{,}51)^{10.000}$, y la desviación típica será en números redond[illegible] cimientos. La distribución se extenderá, por consiguiente, [illegible] o más nacimientos a cada lado de la media, y para obtenerla [illegible] que calcular nada menos que unos 300 términos de la serie [illegible] exponente 10.000. Esto no sólo sería prácticamente imposible [illegible] pleo de ciertos métodos de aproximación, sino que daría la [illegible] con un detalle innecesario; desde el punto de vista práctico, [illegible] mos obtener la distribución de frecuencia en intervalos de un [illegible] miento, sino en intervalos de 100, por ejemplo. Necesitamos, [illegible] tituir el polígono binomial por una curva continua que tenga [illegible] damente las mismas ordenadas, y que entre dos ordenadas [illegible] ra y_1 e y_2 comprenda un área equivalente a la frecuencia de [illegible] vaciones registradas entre los correspondientes valores x_1 [illegible] variable.

FORMA LIMITE DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL CUANDO n CRECE INDEFINIDAMENTE

10.15. Cuando n se hace grande, cada uno de los términos [illegible] arrollo binomial se hace pequeño. Pero lo que importa es la [illegible] términos comprendidos entre ciertos límites, los cuales no [illegible] general, próximos.

Consideremos en primer lugar el caso en que p y q son [illegible] términos de la serie son:

$$N\left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right.$$

La probabilidad de m aciertos es:

$$N\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

[illegible]bilidad de $m+1$ aciertos se deduce de la anterior sin más que [illegible] por $(n-m)/(m+1)$ Esta última frecuencia será, por tanto, [illegible] la anterior siempre que

$$n - m > m + 1$$

$$m < \frac{n-1}{2}$$

[illegible]gamos, para mayor sencillez, que n sea par, por ejemplo, [illegible]; entonces la probabilidad de k aciertos será la mayor, y su [illegible]

$$y_0 = N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{k!\,k!} \tag{10.6}$$

[illegible]lígono se extiende simétricamente a cada lado de la ordenada [illegible]. Consideremos la probabilidad de $k+x$ aciertos; su valor es:

$$y_x = N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{(k+x)!\,(k-x)!} \tag{10.7}$$

[illegible]

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-x+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+x)}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\left(1-\frac{3}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(1+\frac{3}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{x-1}{k}\right)\left(1+\frac{x}{k}\right)} \tag{10.8}$$

[illegible] ahora su valor aproximado suponiendo que k sea muy [illegible] en comparación con x, de modo que pueda despreciarse $(x/k)^2$ [illegible] con (x/k). Esta hipótesis no implica dificultad alguna, por[illegible] falta considerar valores de x mucho mayores que tres veces [illegible] típica ó $3\sqrt{k/2}$, y el cociente de este valor por k es $3/\sqrt{2k}$, [illegible]mente será pequeño cuando k sea grande. En esta hipótesis, [illegible] aplicar el desarrollo en serie logarítmica

$$\log_e(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \ldots$$

[illegible] de los paréntesis de la fracción (10.8), despreciando los tér[illegible] siguen al primero. Con esta aproximación tendremos:

$$\log_e \frac{y_x}{y_0} = -\frac{2}{k}(1+2+3+\ldots\overline{x-1}) - \frac{x}{k}$$
$$= -\frac{x(x-1)}{k} - \frac{x}{k}$$
$$= -\frac{x^2}{k}$$

Luego tendremos finalmente

$$y_x = y_0\, e^{-\frac{x^2}{k}} = y_0\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (10.9)$$

en donde la constante k del segundo miembro ha sido sustituída por la desviación típica σ, por ser $\sigma^2 = k/2$.

10.16. El caso en que p no es igual a q puede tratarse de manera análoga, si bien resulta algo más complicado.

Según ya vimos, la probabilidad de m aciertos es

$$N \times {}^nC_m q^{n-m} p^m$$
$$= N \frac{n!}{m!(n-m)!} q^{n-m} p^m$$

La probabilidad de $m+1$ aciertos se deduce de la anterior multiplicándola por $\frac{n-m}{m+1}\,\frac{p}{q}$, y, por tanto, será mayor que la anterior siempre que

$$\frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q} > 1$$

o bien

$$m < np - q$$

Supongamos que np sea un número entero. Puesto que n crece tendiendo a infinito, ello no impone restricción alguna a nuestro razonamiento.

La probabilidad máxima es, por tanto,

$$y_0 = N \frac{n!}{(np)!\,(nq)!} q^{nq} p^{np} \qquad (10.10)$$

La probabilidad de $pn+x$ aciertos será

$$y_x = N \frac{n!}{(np+x)!\,(nq-x)!} q^{nq-x} p^{np+x} \qquad (10.11)$$

Por consiguiente,

$$\frac{y_x}{y_0} = \frac{np!\,nq!}{(np+x)!\,(nq-x)!} q^{-x} p^{x} \qquad (10.12)$$

Y por un importante teorema debido a James Stirling (1730), para grandes valores de n se verifica aproximadamente

$$n! = \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n}$$

Aplicando esta fórmula tenemos

$$\frac{y_x}{y_0} = \frac{\sqrt{2np\pi}\,(np)^{np} e^{-np}\sqrt{2nq\pi}\,(nq)^{nq} e^{-nq}\,p^x}{\sqrt{2(np+x)\pi}\,(np+x)^{np+x} e^{-np-x}\sqrt{2(nq-x)\pi}\,(nq-x)^{nq-x} e^{-nq+x}\,q^x}$$

que se reduce a

$$\frac{y_x}{y_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{np}\right)^{np+x+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{nq}\right)^{nq-x+\frac{1}{2}}}$$

Luego

$$\log_e\left(\frac{y_x}{y_0}\right) = -\left(np+x+\frac{1}{2}\right)\log_e\left(1+\frac{x}{np}\right)$$
$$-\left(nq-x+\frac{1}{2}\right)\log_e\left(1-\frac{x}{nq}\right)$$
$$= -\left(np+x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{np}-\frac{x^2}{2n^2p^2}+\frac{x^3}{3n^3p^3}+\ldots\right)$$
$$-\left(nq-x+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{nq}-\frac{x^2}{2n^2q^2}-\frac{x^3}{3n^3q^3}-\ldots\right)$$

y realizando operaciones resulta:

$$\log_e\left(\frac{y_x}{y_0}\right) = -\frac{x^2}{2npq} + \frac{x^2(p^2+q^2)}{4n^2p^2q^2} + \frac{p-q}{2npq}x + \frac{q^2-p^2}{6n^2p^2q^2}x^3$$

$$+\text{términos de orden } \frac{1}{n^3} \text{ y órdenes superiores.}$$

Puesto que $p+q=1$, tendremos, despreciando los términos de orden $\frac{1}{n^3}$ y órdenes superiores, que, para grandes valores de n, son pequeños si se comparan con los demás:

$$\log_e\left(\frac{y_x}{y_0}\right) = -\frac{x^2}{2npq} + \frac{x^2(p^2+q^2)}{4n^2p^2q^2} + \frac{q-p}{2npq}\left(-x+\frac{x^3}{3npq}\right) \qquad (10.13)$$

Pongamos, como antes, $npq = \sigma^2$, siendo σ la desviación típica de la distribución binomial. Si n es grande, el segundo término será pequeño

comparado con el primero. Además, como no necesitamos considerar valores de $\frac{x}{\sigma}$ mucho mayores que 3, podremos prescindir de todo el tercer término cuando $\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$ sea pequeño. En estas hipótesis tendremos:

$$\log_e \frac{y'_x}{y_0} = -\frac{x^2}{2\sigma^2}$$

o bien

$$y_x = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (10.14)$$

como antes.

La expresión $\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$ no es más que $\sqrt{\beta_1}$, y, por tanto, lo dicho equivale sencillamente a suponer que β_1 es pequeño; por mucho que difieran p y q, siempre podremos hacer que $\sqrt{\beta_1}$ sea tan pequeña como se quiera sin más que hacer n suficientemente grande.

10.17. Por tanto, sean o no iguales p y q, la distribución binomial tiende, al crecer n, a la forma de la curva continua (10.9) y (10.14), por lo menos en la parte sustancial del campo de variación. Es, en realidad, sorprendente la aproximación de la distribución binomial a la curva, hasta para valores relativamente bajos de n, siempre que p y q sean casi iguales. El lector puede trazar la curva con ayuda de las tablas dadas al final de este libro (véase más abajo 10.26) y compararla con algunas de las distribuciones binomiales más sencillas representadas a la misma escala.

10.18. La curva

$$y = y_0 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

recibe el nombre de *curva normal*. Todo colectivo que, clasificado según una variable continua, dé una distribución de frecuencias semejante a una curva normal recibe el nombre de *colectivo normal*.

Las aplicaciones de la curva normal no se limitan en modo alguno a las distribuciones del tipo binomial. Pero, antes de referirnos a sus muchas aplicaciones prácticas y teóricas, expondremos brevemente sus principales propiedades.

PROPIEDADES DE LA CURVA NORMAL

10.19. La curva normal es evidentemente simétrica respecto del punto $x=0$, puesto que su ecuación es independiente del signo de x. En ese punto, tiene la ordenada su valor máximo. La media, la mediana y el promedio típico coinciden, y la curva es precisamente la trazada en la figura 6.5, que se toma como la forma ideal de curva simétrica.

10.20. La curva queda completamente determinada cuando se define la media (origen de las x), la desviación típica y el valor y_0.

En la práctica, por ejemplo, cuando se trata de ajustar una curva normal a determinados datos, no se nos da el valor de y_0 directamente, sino que hay que calcularlo mediante la condición de que el área de la curva sea igual, en la escala elegida, al número total de observaciones. Por esta razón nos interesa hallar el área limitada por la curva

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

10.21. Según vimos en 6.14, el área de un histograma, esto es, el número total de observaciones que éste representa, viene dado por

$$\text{Area} = \overset{r=n}{\underset{r=1}{S}} (f_r) \times h$$

en donde h representa la amplitud del intervalo; fr, la frecuencia del intervalo r-ésimo; y n, el número de intervalos.

Cuando el histograma tiende a la curva continua, la amplitud de los intervalos disminuye, y el número de términos de la suma aumenta. En la curva normal, que se extiende indefinidamente a ambos lados de la media, el límite a que tiende la suma al hacerse los intervalos infinitamente pequeños y el número de términos infinitamente grande, se representa por

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

en donde el signo $\int$ es una forma convencional del signo S de sumación, y dx representa el valor infinitamente pequeño de h.

Esta es la notación que se emplea en cálculo integral, y la cantidad $\int_{-a}^{b} F(x)dx$ se lee: integral de $F(x)$ entre los límites $-a$ y b. En este libro no emplearemos los métodos del cálculo integral, y por ello habremos de establecer algunos resultados sin la correspondiente demostración. Bastará que el lector recuerde que el proceso de integración es el paso al límite de la sumación directa, con la cual está ya familiarizado.

10.22. El área de la curva

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

será, por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Por tanto, de acuerdo con este convenio, recorrida ahora la $\int_\gamma$ a izquierdas

$$-\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_\gamma \Phi(x,y)\,dx$$

Sean ahora $X(x, y)$ $Y(x, y)$ dos funciones derivables en R, con derivadas continuas y, por tanto, integrables y apliquemos estos resultados a la integral doble

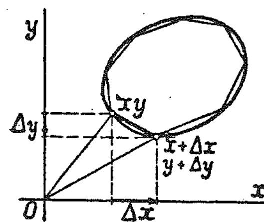
$$\int\int_R \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\int_R \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\,dy - \int\int \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy$$

La primera equivale a $\int_\gamma Y\,dy$ recorrida a izquierdas; la segunda con signo (—) vale $+\int_\gamma X\,dx$ recorrida también a izquierdas. Por tanto,

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma X\,dx + Y\,dy \quad \text{(}\gamma \text{ contorno de } R \text{ recorrido en sentido positivo).} \qquad [7]$$

importante fórmula de Riemann o Green que vuelve a dar como condición necesaria y suficiente para que sea nula la integral curvilínea del segundo miembro en todo contorno cerrado, perteneciente a un dominio simplemente conexo en el que se suponen existentes y continuas las derivadas Y_x, X_y, que se verifique idénticamente $Y_x = X_y$

Ejemplo: Si $X = -\frac{y}{2}$, $Y = \frac{x}{2}$ resulta $\frac{1}{2}\int_\gamma x dy - y dx = \int\int_R dx dy =$ área de R El area encerrada por una curva de Jordán cerrada, viene, pues, también dada por la integral curvilínea



$$\frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx$$

cuya interpretación geométrica es sencilla.

Considerando la cuerda que une dos puntos del contorno xy, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ el área del triángulo que esta cuerda determina con el centro es

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+\Delta x & y+\Delta y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,\Delta y - y\,\Delta x)$$

La suma algebraica de estas áreas, con sus signos extendida a las cuerdas de un polígono inscrito, es el área de este polígono (recorrido a izquierdas) (*) y la integral curvilínea anterior representa, por tanto, el límite del área de este polígono cuando los lados tienden a cero.

5. Cambio de variables en integrales dobles.—Con frecuencia el reticulado paralelo a los ejes y las fórmulas de integración a que nos ha dado

(*) V. nuestro «Curso de Geometría Métrica».

lugar, no proporcionan el camino más cómodo para calcular una integral doble.

Por ejemplo, si el dominio de integración es un sector de corona con centro en el origen, no cabe duda que resulta más práctico dividir este dominio en sectores elementales por un sistema de circunferencias de radios intermedios $r_1 r_2 \ldots r_n$ y de semirrectas de rumbos $\theta_1\, \theta_2 \ldots \theta_m$ intermedios entre los extremos, lo que equivale en definitiva a utilizar coordenadas polares, que vienen impuestas por la naturaleza del contorno. El área de cada sector elemental será de la forma $r\Delta\theta\Delta r$ donde r es el *radio medio*, y sustituyendo en $f(x, y)$ las variables por su expresión en polares $x=r\cos\theta$ $y=r\operatorname{sen}\theta$ nos veremos conducidos a calcular la integral doble,

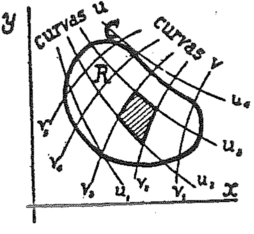
$$\iint f(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

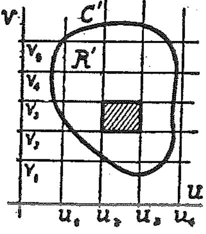
extendida entre los límites de r (radios extremos) y los de θ (rumbos extremos), con la ventaja de ser ahora estos límites constantes en las dos integraciones.

Claro es que si llevamos las nuevas variables θ y r sobre unos ejes cartesianos, podemos interpretar la misma integral extendida en un recinto de integración *rectangular*, es decir de distinta forma. La integral se convierte en $\iint \varphi(r, \theta) d\theta dr$ extendida en este recinto, en la que $\varphi(r\theta) = rf(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)$. Como se ve, la nueva función integrada no se obtiene sustituyendo simplemente en la anterior xy por sus expresiones en función de r y θ; aparece, además, un factor r cuya significación vamos a ver en seguida.

Propongámonos, en general, efectuar en la $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ extendida a un cierto recinto R definido por un contorno C de ecuación $\psi(x, y)=0$ la sustitución de las variables x, y por otras nuevas u, v relacionadas con ellas mediante la transformación

$$x=x(u, v) \qquad y=y(u, v) \quad [1]$$





que supondremos biunívoca, es decir, que estas relaciones definen análogamente u, v como funciones de x, y y, por tanto, que el jacobiano $\frac{D(xy)}{D(uv)} \neq 0$. Supondremos este jacobiano continuo, así como continua y distinta de cero la derivada parcial $\frac{\partial x}{\partial u}$

El contorno C de ecuación $\psi(x, y)=0$ en el plano xy se transforma en el contorno C' de ecuación $\psi(x(u, v), y(u, v))=0$ en el plano cartesiano u, v y, por tanto, el recinto R del plano xy se transforma en el R' limitado por C'.

Efectuaremos la transformación en dos pasos. En el primero conservaremos la variable x y cambiaremos y en v. Las fórmulas de paso se obtendrán resolviendo la primera ecuación [1] en u

$$u=u_1(x, v) \quad \text{de donde} \quad y=y(u_1(x, v)\ v)=y_1(x, v) \qquad [2]$$

Realicemos esta transformación en la primera integración efectuada con relación a y; es decir, en la integral subrayada

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int dx \int \underline{f(x, y)\, dy}$$

Siendo x constante en esta integración será $dx=0$, y, por tanto,

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

De estas dos ecuaciones resulta, eliminando du, la siguiente relación entre dy y dv

$$dv = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u} dy}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}, \quad \text{o sea} \quad dy = \frac{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} dv$$

Por lo tanto,

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int dx \int f(x, y) \frac{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} dv$$

En esta última integral doble las variables de integración son ahora x, v, de modo que en $f(x, y)$, en el jacobiano y en la derivada parcial, hemos de imaginar provisionalmente sustituídos uy por sus expresiones [2] en función de x, v. En cuanto al recinto de integración será asimismo el transformado de R mediante [2]. Ahora bien, en esta integral podemos invertir el orden de las integraciones empezando por calcular la integral en x, considerando v como constante, con lo que $dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du$ y, por tanto,

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int dv \int f(x, y) \frac{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} \overbrace{\frac{\partial x}{\partial u} du}^{dx} =$$

$$= \iint_{R'} f[x(u, v), y(u, v)] \frac{D(xy)}{D(uv)} du\, dv \qquad [3]$$

Esta integral transformada tiene ya como variables u, v y se extenderá definitivamente al recinto R' transformado del R mediante [1].

Aplicando este resultado a la transformación de coordenadas cartesianas a polares $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$ se comprueba que $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}=r$, con lo que se ve la significación analítica del factor r antes hallado.

6. Interpretación geométrica del jacobiano de la transformación.— Pero recíprocamente esto nos sugiere la significación geométrica del jacobiano $J(u, v)=\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ que interviene en la transformación [3]. Trazando en el plano u, v un reticulado paralelo a los ejes, resulta en el plano xy un reticulado correspondiente determinado por las curvas cuyas ecuaciones son $u(x, y)=\text{const.}$ $v(x, y)=\text{const.}$ designadas en la figura abreviadamente por curvas u y curvas v. Si nos proponemos calcular el área de una malla curvilínea de esta red, correspondiente a una malla rectangular del plano u, v obtendremos, en virtud de lo anterior y aplicando el teorema de la media,

$$\text{Area malla}=\iint dx\,dy=\iint_{\square} J(u, v)\,du\,dv=J(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,\Delta u\,\Delta v$$

donde $J(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ significa el valor del jacobiano en un cierto punto $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ del rectángulo de lados $\Delta u\Delta v$. El jacobiano $J(u, v)$ representa, pues, el *factor por el que hay que multiplicar el elemento rectangular de área* du dv *del recinto transformado* R' *para hallar el elemento de área de la parcela curvilínea homóloga en el dominio* R.

A este mismo resultado puede llegarse transformando la integral doble, que da el área, en integral curvilínea y después de transformada ésta, expresándola nuevamente como integral doble mediante la fórmula de Riemann; así

$$\iint_R dx\,dy=\int_C x\,dy=\int_{C'} \underbrace{x(u, v)\frac{\partial y}{\partial u}}_{U}du+\underbrace{x(u, v)\frac{\partial y}{\partial v}}_{V}dv=\iint_{R'}\left(\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{\partial U}{\partial v}\right)du\,dv=$$

$$=\iint_{R'}\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-x\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv=\iint_{R'}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}du\,dv$$

Si en esta transformación se conserva el sentido, o sea que a un sentido positivo de recorrido de C corresponde asimismo un sentido positivo en C', la integral final tiene igual signo que la inicial, y signo opuesto en caso contrario; pero esto lo da automáticamente el jacobiano, cuyo signo indica si la transformación conserva o no el sentido. Compruébese en la transformación de cartesianas a polares cambiando el orden de r y θ.

NOTAS

7. Derivación bajo el signo integral doble.—Si el integrando de una integral doble extendida en un dominio fijo R depende de un parámetro z, esta integral dependerá a su vez de z, es decir

$$\iint_R f(x, y, z)\,dx\,dy=F(z)$$

6. Aplicaciones de las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$ a otros algebraicas.—Recordemos los resultados obtenidos en la lección 10, § 6, expresándolos, para abreviar, con el signo !! (semifactorial)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx =$$

$$= \begin{cases} (\text{si } m \text{ par}) = \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{m(m-2)\ldots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{abreviadamente } \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\,\dfrac{\pi}{2} \\ (\text{si } m \text{ impar}) = \dfrac{(m-1)(m-2)\ldots 2}{m(m-2)\ldots 3} & \text{abreviadamente } \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \end{cases} \quad [16]$$

De ellos vamos a obtener algunas aplicaciones.

EJEMPLO 1.° En la integración de funciones racionales en el caso de imaginarias múltiples se llega a integrales del tipo $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ que mediante el cambio de variable $x = \operatorname{tg}\theta$ se transforma en $\int \cos^{2n-2}\theta\,d\theta$. Si el intervalo de integración de la primera es $[0, \infty]$, el de la segunda es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y resulta:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{[1+x^2]^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta\,d\theta = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 2.° La integral $\int_0 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ se transforma mediante $x = \operatorname{sen}\theta$ en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n\theta\,d\theta$. Por tanto,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

7. Fórmula de Wallis.—Por ser $\operatorname{sen} x \leqslant 1$, será $\operatorname{sen}^{2n+1}x \leqslant \operatorname{sen}^{2n}x \leqslant \operatorname{sen}^{2n-1}x$ desigualdades que multiplicadas por dx e integradas entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ dan

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

de donde

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n}$$

y, por tanto,

$$\pi = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2n+\theta}$$

siendo θ un número comprendido entre 0 y 1.

Pasando al límite esta igualdad para $n \to \infty$ se obtiene finalmente

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \qquad [17]$$

fórmula notable de Wallis que da el valor de π en forma de producto infinito.

De ella resulta

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} \qquad [18]$$

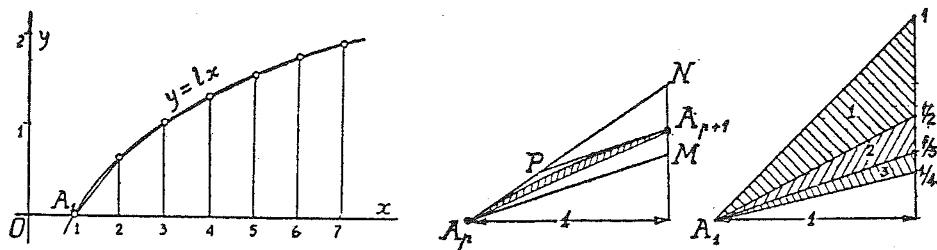
8. Fórmula de Stirling.—En Cálculo de probabilidades y en Estadística es frecuente operar con factoriales de números elevados, de laborioso cálculo. Interesa sustituirlas por valores aproximados que simplifiquen las operaciones sin introducir errores relativos de consideración en los resultados. Tal es el objeto de la fórmula de Stirling, de la que vamos a dar una demostración sencilla (*).

El área del polígono inscrito en la curva $y = lx$, cuyos vértices son los puntos de abscisas 1, 2, 3, 4, ..., n, vale evidentemente

$$\tfrac{1}{2}(l1 + ln) + l2 + l3 + \ldots + l(n-1) = ln\,! - \tfrac{1}{2}ln$$

y representa un valor aproximado por defecto del área limitada por la curva

$$\int_0^n lx\,dx = [x\,lx - x]_1^n = n\,ln - n + 1$$



El error es la suma σ_r de los segmentos de curva logarítmica indicados en la figura 1, muy fácil de acotar geométricamente. En efecto, por ser la derivada $1/x$ una función monótona, la pendiente de la cuerda en cada intervalo es intermedia entre las pendientes de la curva en los extremos. Por lo tanto,

(*) Reproducimos los razonamientos iniciales de un artículo nuestro publicado en «Revista Matemática Hispano Americana», serie 3.ª, tomo I.

la curva y su cuerda están comprendidas entre la tangente A_pN (fig. 2) en el origen y la paralela A_pM por él a la tangente en el extremo. El área de cada segmento es, pues, notoriamente inferior al área del triángulo A_pMN.

Trasladando todos estos triángulos a un vértice común (por ejemplo el origen del primer intervalo), se suman por sí solos, y su suma tiene el límite evidente 1/2 (fig. 3). Por tanto, podemos afirmar que $0<\sigma_n<1/2$.

Relacionando el valor exacto y el aproximado, tenemos

$$ln\, !=n\, ln-n+\tfrac{1}{2}\, ln+1-\sigma_n$$

de donde

$$n\,!=\varphi(n)\,.\,n^n e^{-n}\sqrt{n} \qquad [19]$$

en la que la función $\varphi(n)=e^{1-\sigma_n}$ es monótona decreciente por crecer σ_n, y se conserva superior a $e^{\frac{1}{2}}$. Tiene, por consiguiente, límite al crecer n indefinidamente.

Probada la existencia de dicho límite (*) su determinación se efectúa fácilmente sustituyendo el valor [19] en la fórmula de Wallis o mejor en [18].

Se obtiene así

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2^{2n}\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot n}{(2\,n)^{2n}e^{-2n}\cdot\sqrt{2\,n}}\cdot\frac{\lim\,[\varphi\,(n)]^2}{\lim\varphi\,(2\,n)}$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(2n)$, queda

$$\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim\varphi(n) \quad \text{o sea} \quad \lim\varphi(n)=\sqrt{2\pi}$$

En resumen podemos adoptar como valor aproximado (por defecto) de $n\,!$ el resultado de sustituir $\varphi(n)$ por su límite en [19], o sea

$$n!\cong\sqrt{2\,\pi\,n}\,n^n\,e^{-n}$$

fórmula de Stirling que cumple el objeto antes mencionado.

Se obtiene una acotación del error mediante la fórmula exacta (**)

$$n!=\sqrt{2\pi\,n}\,n^n\,e^{-n}\,e^{\frac{\theta}{12\,n}}, \qquad 0<\theta<1$$

por la que se ve que el error relativo es en valor absoluto

$$\frac{e^{\frac{\theta}{12\,n}}-1}{e^{\frac{\theta}{12\,n}}}=1-e^{-\frac{\theta}{12\,n}}=\frac{\theta}{12\,n}-\frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{12\,n}\right)^2+\ldots<\frac{1}{12\,n}$$

(*) Demostración que creemos haber simplificado. Compárese, por ej., con BOREL, *Traité du Calcul des Probabilites et de ses applications*, fac. I, pág. 29 y siguientes. Idem con CASTELNUOVO, *Calcolo delle Probabilità*, Apéndice. Id. con USPENSKY, *Introduction to mathematical probability*, Apéndice I.

(**) Véase la demostración en nuestro artículo citado.

Lección 10.—Integración de funciones trascendentes

Las funciones trascendentes conducen, en general, a integrales no expresables mediante funciones elementales. Tal ocurre, por ejemplo, con las integrales de sencilla apariencia: $\int \frac{e^x}{x}\,dx$, o su transformada $\int \frac{dx}{lx}$ (trascendente llamada logaritmo integral), $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, $\int e^{x^2}\,dx$, $\int e^{-x^2}\,dx$ (integral de las probabilidades), etc....

Veamos, sin embargo, algunos tipos de integrales transformables en integrales racionales mediante cambios convenientes.

1. Integración del tipo $\int R(a^x)dx$.—Suponiendo R racional, el cambio $a^x = t$, de donde $x = \log_a t$, $dx = \frac{\log_a e}{t}\,dt$, la transforma en

$$\int R(a^x)\,dx = \log_a e \int \frac{R(t)}{t}\,dt \quad \text{(racional en } t\text{)}$$

El procedimiento es generalizable a toda integral de la forma

$$\int R[f(x)]\,dx$$

donde R sea racional y la función inversa de $f(x)$ admita derivada racional, pues entonces el cambio $f(x) = t$, $x = \varphi(t)$ (inversa), $dx = \varphi'(t)dt$ (racional) dará

$$\int R[f(x)]\,dx = \int R(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

que es racional.

Tal ocurre, por ejemplo, con las integrales de los tipos

$$\int R[\operatorname{tg}(kx+b)]\,dx, \quad \int R[\operatorname{Th}(kx+b)]\,dx$$

Ejemplo 1.° Sea $\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\,dx$. Poniendo $e^x = t$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$, queda

$$\int \frac{t-3t^2}{1+t}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{1-3t}{1+t}\,dt = -3t + 4l(1+t)$$

por tanto,

$$\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\,dx = -3e^x + 4l(e^x+1) + C$$

Ejemplo 2.° $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{1 - 2\operatorname{tg} x}\,dx$. Poniendo $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, resulta

$$\int \frac{t^3+t}{1-2t}\,\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t\,dt}{1-2t} = -\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\,l(1-2t)$$

de donde

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{1-2\operatorname{tg} x}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \frac{1}{4}\,l(1-2\operatorname{tg} x)$$

2. Integración de $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$.—Recordando que el seno y el coseno de un ángulo son expresables racionalmente en función de la tangente del arco mitad

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

la integral considerada es de la forma $\int R_1\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)dx$ y, por tanto será racionalizable mediante el cambio $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, resultando

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = 2\,\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

Recordando que las restantes funciones goniométricas se expresan racionalmente mediante el seno y el coseno, y que el seno y el coseno de los múltiplos de un ángulo x se expresan mediante polinomios en sen x, cos x, resulta en definitiva:

Toda función racional de las funciones goniométricas de un ángulo x o de sus múltiplos, es integrable mediante las funciones elementales.

Ejemplo:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}\,dx$$

...o $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ conduce a

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{8t^3+4t(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int\frac{(1-t^2)(1+t^2)}{4t^3+2t(1-t^2)^2}\,dt$$

3. Casos particulares sencillos.—1.° Si la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es ...r en sen x, cos x, es decir, si no se altera al cambiarlos simultáneamente ...r $-$sen x, $-$cos x, se simplifica notablemente la función racional resul...nte expresando sen x y cos x en función de tg $x=t$, pues aunque

$$\operatorname{sen} x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

...n irracionales, su combinación por producto o cociente es racional, como ..., y se obtienen términos de grado menos elevado que con el cambio $\frac{x}{2}=t$.

Ejemplo.—Así la integral del ejemplo anterior se transforma en

$$\int\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t^3+2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}\;\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t^3+2t}$$

...toriamente más sencilla que la obtenida antes.

2.° Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es *impar* en cos x, es decir, si cambia de signo ... sustituir cos x por $-$cos x, podemos escribir la integral así

$$\int\frac{R(\operatorname{sen} x, \cos x)}{\cos x}\cos x\,dx=\int R_1(\operatorname{sen} x, \cos x)\cos x\,dx$$

...n la que R_1 es par en cos x, y, por tanto, expresable racionalmente en fun...ión de sen $x=t$, cambio con el que se obtiene

$$\int R_1(\operatorname{sen} x\cos x)\cos x\,dx=\int R_2(t)\,dt \quad \text{(racional)}$$

Ejemplo.—Aplicando este cambio al ejemplo anterior se obtiene

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x+2\cos^2 x\operatorname{sen} x}=\int\frac{dt}{t^3+2(1-t^2)t}=\int\frac{dt}{2t-t^3}$$

3.° Análogamente, si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es *impar* en sen x es indicado el ...ambio cos $x=t$ que racionalizará la integral.

4. Integración de $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$.—Las integrales de este tipo (muy ...ecuente en las aplicaciones), en las que se suponen m y n enteros positi-

BIBLIOTECA SAN SEBASTIÁN

vos o negativos, se pueden tratar por los cambios que acabamos de indicar, o sea:

1.° Si m es impar, haremos cos $x=t$.

Ejemplo: $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^4 x\,dx=\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\operatorname{sen} x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x\,d\cos x$

$$=-\int(1-t^2)t^4\,dt=-\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C$$

2.° Si n es impar, podemos hacer análogamente sen $x=t$.

3.° Si m y n son de igual paridad, podemos hacer tg $x=t$.

Ejemplo:
$$\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}=\frac{1}{3}\operatorname{tg} x+C$$

5. Fórmulas de reducción.—Aparte de los cambios anteriores, en todos los casos puede seguirse el procedimiento de integración por partes para efectuar la *reducción de los exponentes* en la

$$\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$$

que designaremos por $I_{m,n}$.

En efecto, pongamos $\operatorname{sen}^m x\cos x\,dx=dv$ y tendremos

$$I_{m,n}=\int\underbrace{\cos^{n-1}x}_{u}\underbrace{\operatorname{sen}^m x\cos x\,dx}_{dv}=\frac{\operatorname{sen}^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\operatorname{sen}^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx \qquad [1]$$

Esta fórmula basta para reducir (en valor absoluto) ambos exponentes si m es negativo y n positivo.

En la integral del segundo miembro pongamos ahora

$$\operatorname{sen}^{m+2}x=\operatorname{sen}^m x\,(1-\cos^2 x)$$

y resultará

$$I_{m,n}=\frac{\operatorname{sen}^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}I_{m,n-2}-\frac{n-1}{m+1}I_{m,n}$$

de donde, despejando $I_{m,n}$

$$I_{m,n}=\frac{\operatorname{sen}^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\,I_{m,n-2} \qquad [2]$$

forma de reducción del exponente n (supuesto >0).

Análogamente, poniendo $\cos^n x\operatorname{sen} x\,dx=dv$, obtendremos

$$I_{m,n}=-\frac{\cos^{n+1}x\operatorname{sen}^{m-1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{n+2}x\operatorname{sen}^{m-2}x\,dx \qquad [3]$$

que sirve para reducir los dos exponentes simultáneamente si n es negativo y m positivo.

$\cos^{n+2} x = \cos^n x\,(1-\text{sen}^2 x)$ resulta

$$\ldots \frac{\cos^{n+1} x\,\text{sen}^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n} - \frac{m-1}{n+1} I_{m,n}$$

$$\ldots_{,n} = -\frac{\cos^{n+1} x\,\text{sen}^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \qquad [4]$$

...ón del exponente m (supuesto >0).
...entes son negativos, podemos aplicar estas fórmulas en ... decir, despejando $I_{m,n-2}$, $I_{m-2,n}$ en función de $I_{m,n}$. ...ión de los exponentes (en valor absoluto) se efectúa de ...es, se llegará de esta forma a reducir todas estas inte-

$$\ldots x, \quad \int \cos x\,dx = \text{sen}\,x, \quad \int \text{sen}\,x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}^2 x$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = l\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \quad \int \frac{dx}{\text{sen}\,x \cos x} = l\,\text{tg}\,x$$

$$\ldots dx = l\,\text{sen}\,x, \quad \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\,dx = -\,l \cos x\,.$$

...de $\int \text{sen}^m x\,dx$, $\int \cos^m x\,dx$.—Casos particulares de los ...ratar son aquellos en que $n=0$ ó $m=0$.
...en [4] resulta

$$\ldots dx = -\frac{\text{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \text{sen}^{m-2} x\,dx \qquad [5]$$

...en [2]

$$\ldots x\,dx = \frac{\text{sen}\,x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad [6]$$

...últimos términos de la reducción, a la integral $\int dx = x$ ..., y a las integrales

$$\int \text{sen}\,x\,dx, \quad \int \cos x\,dx$$

...e aplicación estas integrales especialmente limitadas en-...ndo estos límites a las integrales [5] y [6], los términos ...an y queda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{m-2} x\,dx \qquad [7]$$

Reiterando esta fórmula de reducción se llega, si m es impar, a la

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\,x\,dx = 1$$

y si m es par a la

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{m(m-2)\ldots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{si } m \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{m(m-2)\ldots 3} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \qquad [8]$$

Análogamente $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx$, reducción que es idéntica a [7], y como también $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1$, resulta para $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$ los mismos valores [8]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x\,dx$$

7. Integracion de productos de senos y cosenos — Recordemos que la Trigonometría enseña a transformar productos de senos y cosenos en sumas o diferencias, lo que nos resulta útil en la integración de tales productos. Así, para $m \neq n$

$$\int \text{sen}\,mx\ \ \text{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(m-n)\,x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(m+n)\,x\,dx =$$

$$= \frac{\text{sen}\,(m-n)\,x}{2(m-n)} - \frac{\text{sen}\,(m+n)\,x}{2(m+n)}$$

Si $m=n$

$$\int \text{sen}^2 mx\,dx = \int \frac{1-\cos 2mx}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,2mx}{4m}$$

De donde

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}\,mx\ \text{sen}\,nx\,dx = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 mx\,dx = \pi \quad (m=n)$$

2309 ISBN

Análogamente, para $m \mp n$,

$$\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m-n)}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx = 0$$

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = \frac{\cos(m-n)x}{2(n-m)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx = 0$$

y para $m = n$

$$\int \cos^2 mx\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2mx}{4m}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi$$

$$\int \operatorname{sen} mx \cos mx\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 mx}{2m}, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos mx = 0$$

El lector generalizará los resultados obtenidos a integrandos de la forma

$$\begin{matrix}\operatorname{sen}\\ \cos\end{matrix}(mx+p)\begin{matrix}\operatorname{sen}\\ \cos\end{matrix}(nx+q)$$

Si se trata de integrar un producto de varios factores seno y coseno, se puede sustituir por una suma el producto de dos de dichos factores. A su vez sustituiremos por sumas los nuevos productos binarios obtenidos por asociación de nuevos pares de factores; y así sucesivamente hasta agotar todos los factores.

8. Integración de expresiones de la forma $\int P(x,\ a^x,\ \operatorname{sen} mx,\ \operatorname{sen} nx,\ ..\ \cos px,\ \cos qx,\ \ldots)\,dx$.—Una expresión de esta forma donde P indica un polinomio, se descompondrá en sus términos monomios y en éstos se sustituirán los productos de senos y cosenos por sumas, como acabamos de indicar en el párrafo anterior. Llegaremos finalmente a integrales de la forma que acabamos de integrar, o a los tipos

$$\int x^m \cdot e^{kx} \cdot dx, \qquad \int x^m \operatorname{sen} nx\,dx, \qquad \int x^m \cos nx\,dx,$$

$$\int x^m \cdot e^{kx} \cdot \operatorname{sen} nx\,dx, \qquad \int x^m \cdot e^{kx} \cdot \cos nx\,dx$$

las cuales fueron integradas en la lección 6.ª

Se obtiene así el siguiente interesante resultado:

I. *Se puede integrar mediante funciones elementales toda combinación polinómica entera de funciones potenciales enteras* x^m, x^n, ..., *exponenciales* a^x, b^x, ... *y senos y cosenos sen* mx, *sen* nx, .., *cos* px, *cos* qx, ...

II. *Se pueden integrar mediante funciones elementales expresiones polinomias de la forma*

$$\int P(x, lx)\,dx, \qquad \int P(x, \operatorname{arc\,sen} x)\,dx, \qquad \int P(x, \operatorname{arc\,cos} x)\,dx$$

pues los cambios respectivos $lx = z$, arc sen $x = z$, arc cos $x = z$ las reducen a la forma anterior

$$\int P(e^z, z)\,e^z\,dz, \qquad \int P(\operatorname{sen} z, z)\cos z\,dz, \qquad -\int P(\cos z, z)\operatorname{sen} z\,dz$$

Ejemplo 1.° $\int [x^2 lx - x(lx)^2]\,dx$ con el cambio $lx = z$ se convierte en $\int e^{3z} z\,dz - \int e^{2z} z^2\,dz$ a las que se aplicarán las fórmulas obtenidas en el § 8 de la lección 6.ª Pero pueden integrarse directamente las integrales en que se descompone la dada. La primera mediante una integración por partes da

$$\int x^2\,lx\,dx = \frac{x^3}{3}\,lx - \frac{1}{3}\int x^3\,\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\,lx - \frac{x^3}{9}$$

La segunda, mediante dos integraciones por partes,

$$\int x\,(lx)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(lx)^2 - \int x\,lx\,dx = \frac{x^2}{2}(lx)^2 - \frac{x^2}{2}(lx) + \frac{x^2}{4}$$

Ejemplo 2.° $\int x(\operatorname{arc\,sen} x)^2\,dx$ se transforma mediante arc sen $x = z$ en

$$\int z^2 \operatorname{sen} z \cos z\,dz = \frac{1}{2}\int z^2 \operatorname{sen} 2z\,dz$$

y mediante $2z = t$ en

$$\frac{1}{16}\int t^2 \operatorname{sen} t\,dt = -\frac{t^2}{16}\cos t + \frac{1}{8}\int t\cos t\,dt = -\frac{t^2}{16}\cos t + \frac{t}{8}\operatorname{sen} t - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen} t\,dt =$$

$$= -\frac{t^2}{16}\cos t + \frac{t}{8}\operatorname{sen} t + \frac{1}{8}\cos t$$

y basta sustituir t por $2 \operatorname{arc\,sen} x$.

9. Aplicación a la integración de irracionales.—En la integración de irracionales cuadráticos de la forma $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ puede, en ocasiones, convenir el cambio trigonométrico

$$x = a \operatorname{sen} \varphi \qquad dx = a \cos \varphi\,d\varphi \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \varphi$$

que conduce al tipo $a \int R(a \operatorname{sen} \varphi,\ a \cos \varphi) \cos \varphi\,d\varphi$, cuya integración se ha visto en el párrafo 2. Este cambio puede resultar especialmente ventajoso si la expresión R es *entera* dando lugar a la forma de los párrafos 3 y 4.

Ejemplo: La integral $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, que puede ser tratada como irracional cuadrática $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$ y también como binómica $\int x^4 (1-x^2)^{-3/2}\,dx$, adquiere forma sencilla con el cambio $x = \operatorname{sen} \varphi$ que da (fórmula 3)

$$\int \frac{\operatorname{sen}^4 \varphi}{\cos^2 \varphi}\,d\varphi = \cos^{-1}\varphi \operatorname{sen}^3 \varphi - 3\int \operatorname{sen}^2 \varphi\,d\varphi = \frac{\operatorname{sen}^3 \varphi}{\cos \varphi} - \frac{3}{2}\varphi + \frac{3 \operatorname{sen} 2\varphi}{4}$$

y restituyendo la variable x

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{3}{2}x\sqrt{1-x^2} = \frac{3x - x^3}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen} x$$

6. Aplicaciones de las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$ **a otras algebraicas.**—Recordemos los resultados obtenidos en la lección 10, § 6, expresándolos, para abreviar, con el signo !! (semifactorial)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx =$$

$$= \begin{cases} (\text{si } m \text{ par}) = \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{m(m-2)\ldots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{abreviadamente } \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\,\dfrac{\pi}{2} \\ (\text{si } m \text{ impar}) = \dfrac{(m-1)(m-2)\ldots 2}{m(m-2)\ldots 3} & \text{abreviadamente } \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \end{cases} \quad [16]$$

De ellos vamos a obtener algunas aplicaciones.

EJEMPLO 1.° En la integración de funciones racionales en el caso de imaginarias múltiples se llega a integrales del tipo $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ que mediante el cambio de variable $x = \operatorname{tg}\theta$ se transforma en $\int \cos^{2n-2}\theta\,d\theta$. Si el intervalo de integración de la primera es $[0, \infty]$, el de la segunda es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y resulta:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{[1+x^2]^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta\,d\theta = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 2.° La integral $\int_0 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ se transforma mediante $x = \operatorname{sen}\theta$ en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n\theta\,d\theta$. Por tanto,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

7. Fórmula de Wallis.—Por ser sen $x \leqslant 1$, será $\operatorname{sen}^{2n+1}x \leqslant \operatorname{sen}^{2n}x \leqslant \operatorname{sen}^{2n-1}x$ desigualdades que multiplicadas por dx e integradas entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ dan

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

de donde

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n}$$

y, por tanto,

$$\pi = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2n+\theta}$$

siendo θ un número comprendido entre 0 y 1.

Pasando al límite esta igualdad para $n \to \infty$ se obtiene finalmente

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \quad [17]$$

fórmula notable de Wallis que da el valor de π en forma de producto infinito.

De ella resulta

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} \quad [18]$$

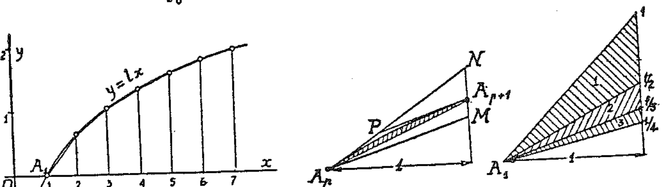
8. Fórmula de Stirling.—En Cálculo de probabilidades y en Estadística es frecuente operar con factoriales de números elevados, de laborioso cálculo. Interesa sustituirlas por valores aproximados que simplifiquen las operaciones sin introducir errores relativos de consideración en los resultados. Tal es el objeto de la fórmula de Stirling, de la que vamos a dar una demostración sencilla (*).

El área del polígono inscrito en la curva $y = lx$, cuyos vértices son los puntos de abscisas 1, 2, 3, 4, ..., n, vale evidentemente

$$\tfrac{1}{2}(l1 + ln) + l2 + l3 + \ldots + l(n-1) = ln! - \tfrac{1}{2}ln$$

y representa un valor aproximado por defecto del área limitada por la curva

$$\int_1^n lx\,dx = [x\,lx - x]_1^n = n\,ln - n + 1$$



El error es la suma σ_n de los segmentos de curva logarítmica indicados en la figura 1, muy fácil de acotar geométricamente. En efecto, por ser la derivada $1/x$ una función monótona, la pendiente de la cuerda en cada intervalo es intermedia entre las pendientes de la curva en los extremos. Por lo tanto,

(*) Reproducimos los razonamientos iniciales de un artículo nuestro publicado en «Revista Matemática Hispano Americana», serie 3.ª, tomo I.

la curva y su cuerda están comprendidas entre la tangente A_pN (fig. 2) en el origen y la paralela A_pM por él a la tangente en el extremo. El área de cada segmento es, pues, notoriamente inferior al área del triángulo A_pMN.

Trasladando todos estos triángulos a un vértice común (por ejemplo el origen del primer intervalo), se suman por sí solos, y su suma tiene el límite evidente 1/2 (fig. 3). Por tanto, podemos afirmar que $0<\sigma_n<1/2$.

Relacionando el valor exacto y el aproximado, tenemos

$$\ln n! = n \ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln n + 1 - \sigma_n$$

de donde

$$n! = \varphi(n) \cdot n^n e^{-n}\sqrt{n} \qquad [19]$$

en la que la función $\varphi(n)=e^{1-\sigma_n}$ es monótona decreciente por crecer σ_n, y se conserva superior a $e^{\frac{1}{2}}$. Tiene, por consiguiente, límite al crecer n indefinidamente.

Probada la existencia de dicho límite (*) su determinación se efectúa fácilmente sustituyendo el valor [19] en la fórmula de Wallis o mejor en [18].

Se obtiene así

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2^{2n}\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot n}{(2n)^{2n} e^{-2n}\cdot\sqrt{2n}} \cdot \frac{\lim[\varphi(n)]^2}{\lim \varphi(2n)}$$

y como $\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(2n)$, queda

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim\varphi(n) \qquad \text{o sea} \qquad \lim\varphi(n)=\sqrt{2\pi}$$

En resumen podemos adoptar como valor aproximado (por defecto) de $n!$ el resultado de sustituir $\varphi(n)$ por su límite en [19], o sea

$$n! \cong \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

fórmula de Stirling que cumple el objeto antes mencionado.

Se obtiene una acotación del error mediante la fórmula exacta (**)

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}, \qquad 0<\theta<1$$

por la que se ve que el error relativo es en valor absoluto

$$\frac{e^{\frac{\theta}{12n}}-1}{e^{\frac{\theta}{12n}}} = 1 - e^{-\frac{\theta}{12n}} = \frac{\theta}{12n} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{12n}\right)^2 + \ldots < \frac{1}{12n}$$

(*) Demostración que creemos haber simplificado. Compárese, por ej., con BOREL, *Traité du Calcul des Probabilites et de ses applications*, fac. I, pág. 29 y siguientes. Idem con CASTELNUOVO, *Calcolo delle Probabilità*, Apéndice. Id. con USPENSKY, *Introduction to mathematical probability*, Apéndice I.

(**) Véase la demostración en nuestro artículo citado.

EJEMPLO. ¿Cuál es la probabilidad de que al partir en dos partes iguales una baraja de 48 naipes exista en ambas mitades 2 ases, 2 doses, 2 treses, etc. ...?

El número total de particiones posibles es $\binom{48}{24}$.

El número total de combinaciones con 2 ases, 2 doses, etc. ..., es $\binom{4}{2}^{12}$.

La probabilidad pedida es, pues, $p=\binom{4}{2}^{12} : \binom{48}{24} = \frac{6^{12}\cdot 24!^2}{48!}$.

Sustituyendo las factoriales por sus valores aproximados tendremos:

$$p \cong \frac{6^{12}\cdot 48\pi\cdot 24^{48} e^{-48}}{\sqrt{96\pi}\cdot 48^{48} e^{-48}} = \frac{3^{12}}{2^{24}}\sqrt{\frac{\pi}{6}} \cong 0{,}0000675$$

con error relativo $<1/12 \cdot 24 = 1/288$. El cálculo logarítmico es sencillo.

9. **Integrales de Fresnel** $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx \int_0^\infty \cos x^2\,dx$.—Desde un punto de vista estrictamente formal, el medio más cómodo de obtenerlas es poner en la relación [15] del § 5 $h=\sqrt{i}$, o bien $1/h=\sqrt{-i}=1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}$, con lo que resulta

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx - i\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

y, por tanto, ambas integrales valen $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$. Pero la validez de esta transformación requiere el estudio previo de la integral en el campo complejo, que será hecho en el tomo II. En las tablas de funciones especiales (como las de Jahnke, Emde) se pueden hallar valores de estas integrales entre 0 y un límite superior variable x. Su cálculo se efectúa con facilidad desarrollando en serie.

EJERCICIOS

1. Calcular las integrales $\int_0^\infty e^{-x^2}x^2\,dx$, $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$.
2. Calcular el valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}x^2dx$, de interés en teoría de errores.
3. Calcular mediante las funciones eulerianas

$$\int_0^\infty e^{-x^4}dx;\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^5 x}}{\sqrt{\cos^3 x}}dx;\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}};\quad \int_0^1 (1-x^n)^p\,dx.$$

4. Hallar con ayuda de las tablas y de las fórmulas de reducción $\Gamma(4{,}3)$, $\Gamma(3{,}5)$, $\Gamma(-0{,}7)$, $\Gamma(-3{,}8)$, $B(5{,}2;\ 2{,}5)$.
5. Area encerrada por la curva $y^3+x^4=1$.
6. Expresar las elípticas completas $K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mediante la función Γ.
7. Calcular mediante la función Γ la longitud de una lemniscata $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$.
8. Tiempo que tarda una bolita, abandonada en el borde horizontal de un recipiente hemisférico, para llegar al fondo. (Péndulo simple con ángulo inicial de 90°.)
9. Longitud de una elipse de eje mayor $2a$ y eje menor=distancia focal.
10. Probabilidad para que 65 números ordenados al azar aparezcan ordenados por decenas; es decir: los diez primeros números de la primera decena, los diez segundos de la segunda, etc.

ISBN
A. 2309

EJEMPLO. ¿Cuál es la probabilidad de que al partir en dos partes iguales una baraja de 48 naipes exista en ambas mitades 2 ases, 2 doses, 2 treses, etc. ...?

El número total de particiones posibles es $\binom{48}{24}$.

El número total de combinaciones con 2 ases, 2 doses, etc. ..., es $\binom{4}{2}^{12}$.

La probabilidad pedida es, pues, $p=\binom{4}{2}^{12} : \binom{48}{24} = \frac{6^{12}\cdot 24!^2}{48!}$.

Sustituyendo las factoriales por sus valores aproximados tendremos:

$$p \cong \frac{6^{12}\cdot 48\,\pi\cdot 24^{48}\,e^{-48}}{\sqrt{96\,\pi}\cdot 48^{48}\,e^{-48}} = \frac{3^{13}}{2^{34}}\sqrt{\frac{\pi}{6}} \cong 0{,}0000675$$

con error relativo $<1/12\,.\,24=1/288$. El cálculo logarítmico es sencillo.

9. **Integrales de Fresnel** $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx \int_0^\infty \cos x^2\,dx$.—Desde un punto de vista estrictamente formal, el medio más cómodo de obtenerlas es poner en la relación [15] del § 5 $h=\sqrt{i}$, o bien $1/h=\sqrt{-i}=1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}$, con lo que resulta

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx - i\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

y, por tanto, ambas integrales valen $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$. Pero la validez de esta transformación requiere el estudio previo de la integral en el campo complejo, que será hecho en el tomo II. En las tablas de funciones especiales (como las de Jahnke, Emde) se pueden hallar valores de estas integrales entre 0 y un límite superior variable x. Su cálculo se efectúa con facilidad desarrollando en serie.

EJERCICIOS

1. Calcular las integrales $\int_0^\infty e^{-x^2}x^2\,dx$, $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx$.

2. Calcular el valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,x^2dx$, de interés en teoría de errores.

3. Calcular mediante las funciones eulerianas

$$\int_0^\infty e^{-x^4}\,dx;\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^5 x}}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx;\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}};\quad \int_0^1 (1-x^n)^p\,dx.$$

4. Hallar con ayuda de las tablas y de las fórmulas de reducción $\Gamma(4{,}3)$, $\Gamma(3{,}5)$, $\Gamma(-0{,}7)$, $\Gamma(-3{,}8)$, $B(5{,}2;\ 2{,}5)$.

5. Area encerrada por la curva $y^2+x^4=1$.

6. Expresar las elípticas completas $K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mediante la función Γ.

7. Calcular mediante la función Γ la longitud de una lemniscata $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$.

8. Tiempo que tarda una bolita, abandonada en el borde horizontal de un recipiente hemisférico, para llegar al fondo. (Péndulo simple con ángulo inicial de 90°.)

9. Longitud de una elipse de eje mayor $2a$ y eje menor=distancia focal.

10. Probabilidad para que 65 números ordenados al azar aparezcan ordenados por decenas; es decir: los diez primeros números de la primera decena, los diez segundos de la segunda, etc.